第７講　三角比・平面図形

1　四角形 ABCD において AB＝CD＝1，BC＝DA＝3 であり，対角線 AC，BD の長さをそれぞれ x，y とする．

(1)　四角形 ABCD の面積 S を x を用いて表せ．また，S の最大値 S_0 を求めよ．

(2)　面積が $\frac{1}{3}S_0$ である四角形 ABCD に対して x^2，y^2 の値を求めよ．ただし，$x \leqq y$ とし，S_0 は(1)で求めたものとする．

(3)　$\cos\angle \mathrm{ACB}$ を x で表せ．また，$\angle \mathrm{ACB}$ が最大となる x の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　円周上に４点 A，B，C，D が反時計回りに並んでいる．直線 AB と直線 DC の交点を E，線分 AC と BD の交点を F とする．AB＝1，BE＝3，AE＝4 であり，△DCF の面積は △ABF の面積の４倍である．

FA＝x，FB＝y，CE＝t，$\dfrac{y}{x}=u$ とおいて，以下の問いに答えよ．

(1)　FC，FD を x，y で表せ．

(2)　t の値を求めよ．

(3)　u の値を求めよ．

(4)　面積の比の値 $\dfrac{\triangle\mathrm{AED}}{\triangle\mathrm{ABF}}$ を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　$\triangle \mathrm{ABC}$ は，$\tan A=\dfrac{4}{3}$，$\mathrm{BC}=6$ を満たしているものとする．ただし，$A=\angle \mathrm{BAC}$ とする．

(1)　$\sin A$ および $\cos A$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　$\triangle \mathrm{ABC}$ の外接円の半径を求めよ．

(3)　$\triangle \mathrm{ABC}$ の面積の最大値と，そのときの辺 AB の長さを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　三角比・平面図形

点Oを中心とする半径aの円Cの周上に，相異なる3点A，B，Pがある．弦ABの長さを$\sqrt{3}\,a$とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$とする．

(1)　点Pが直線ABに関して点Oと同じ側にあるとき，∠APB＝［アイ］°である．

(2)　点Pが円Cの周上を動くとき，△PABの面積はPA＝$\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\,a$のとき最大値$\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}a^{\boxed{\text{キ}}}$をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　三角比・平面図形

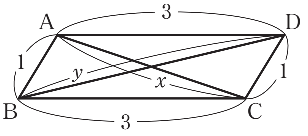
1　四角形 ABCD において AB＝CD＝1，BC＝DA＝3 であり，対角線 AC，BD の長さをそれぞれ x，y とする．

(1)　四角形 ABCD の面積 S を x を用いて表せ．また，S の最大値 S_0 を求めよ．

(2)　面積が $\frac{1}{3}S_0$ である四角形 ABCD に対して x^2，y^2 の値を求めよ．ただし，$x \leqq y$ とし，S_0 は(1)で求めたものとする．

(3)　$\cos\angle ACB$ を x で表せ．また，$\angle ACB$ が最大となる x の値を求めよ．

(1)　$\cos\angle ABC = \dfrac{1+9-x^2}{2\cdot1\cdot3} = \dfrac{10-x^2}{6}$　より



$$1-\cos^2\angle ABC = 1-\frac{(10-x^2)^2}{36} = \frac{-x^4+20x^2-64}{36}$$

よって，$S = \triangle ABC \times 2$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot3\cdot\sin\angle ABC\right)\times2 = 3\sqrt{1-\cos^2\angle ABC} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{-x^4+20x^2-64}}{2}}$$

AB＝1，BC＝3 より，$2<x<4$

また，$S = \dfrac{\sqrt{-(x^2-10)^2+36}}{2}$　より

$x=\sqrt{10}$ のとき S は最大となり　$S_0 = \dfrac{\sqrt{36}}{2} = \mathbf{3}$

【別解】　$s = \dfrac{1}{2}(1+3+x) = \dfrac{1}{2}(x+4)$ とすると，ヘロンの公式より

$$S = \sqrt{s(s-1)(s-3)(s-x)}\times2 = \frac{1}{2}\sqrt{(x+4)(x+2)(x-2)(-x+4)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{-(x^2-16)(x^2-4)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{-x^4+20x^2-64}}{2}}$$

(2)　四角形 ABCD＝$\dfrac{1}{3}S_0 = S$ より　$\sqrt{-x^4+20x^2-64} = 2$

$x^4-20x^2+68=0$　　$x^2 = 10\pm4\sqrt{2}$

この 2 解のうち一方が x^2，もう一方が y^2 である．

$x \leqq y$ より　$\boldsymbol{x^2 = 10-4\sqrt{2}}$　　$\boldsymbol{y^2 = 10+4\sqrt{2}}$

(3)　$\cos\angle ACB = \dfrac{9+x^2-1}{2\cdot3\cdot x} = \dfrac{x^2+8}{6x} = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{x^2+8}{x} = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}\left(x+\dfrac{8}{x}\right)}$　……①

$x>0$ より　(相加平均)≧(相乗平均) から

①$\geqq \dfrac{1}{6}\cdot2\sqrt{x\cdot\dfrac{8}{x}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　（等号成立は　$x=\dfrac{8}{x}$　つまり　$x=2\sqrt{2}$　のとき）

よって　$x=2\sqrt{2}$ のとき　$\cos\angle ACB$ の最小値は　$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos\angle ACB$ が最小のとき $\angle ACB$ は最大より，求める x の値は　$\boldsymbol{x=2\sqrt{2}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　円周上に４点 A，B，C，D が反時計回りに並んでいる．直線 AB と直線 DC の交点を E，線分 AC と BD の交点を F とする．AB＝1，BE＝3，AE＝4 であり，△DCF の面積は △ABF の面積の４倍である．

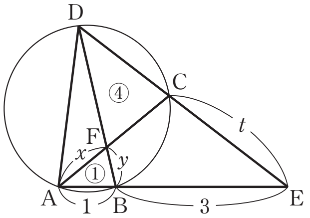
FA＝x，FB＝y，CE＝t，$\dfrac{y}{x}=u$ とおいて，以下の問いに答えよ．

(1)　FC，FD を x，y で表せ．

(2)　t の値を求めよ．

(3)　u の値を求めよ．

(4)　面積の比の値 $\dfrac{\triangle \mathrm{AED}}{\triangle \mathrm{ABF}}$ を求めよ．



(1)　△ABF∽△DCF で，面積比 1：4 より相似比 1：2

よって　FD＝2FA＝$\boldsymbol{2x}$　　FC＝2FB＝$\boldsymbol{2y}$

CD＝2AB＝2

(2)　方べきの定理により　EC・ED＝EB・EA

$t\cdot(t+2)=3\cdot4$　　$t^2+2t-12=0$

$t>0$ より　$\boldsymbol{t=-1+\sqrt{13}}$

(3)　△FAD∽△FBC より　$x:y=\mathrm{AD}:\mathrm{BC}$

△EAD∽△ECB　より　AD：BC＝AE：CE＝4：t

よって　$x:y=4:t$　より　$u=\dfrac{y}{x}=\dfrac{t}{4}=\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{13}}{4}}$

(4)　$\triangle \mathrm{ABD}=\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BF}}\cdot\triangle \mathrm{ABF}=\dfrac{2x+y}{y}\triangle \mathrm{ABF}$

$\triangle \mathrm{AED}=\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}\cdot\triangle \mathrm{ABD}=4\cdot\triangle \mathrm{ABD}=\dfrac{4(2x+y)}{y}\triangle \mathrm{ABF}$

よって　$\dfrac{\triangle \mathrm{AED}}{\triangle \mathrm{ABF}}=4\cdot\dfrac{2x+y}{y}=4\left(2\cdot\dfrac{x}{y}+1\right)$

$=4\left(2\cdot\dfrac{4}{-1+\sqrt{13}}+1\right)=4\left\{\dfrac{2(\sqrt{13}+1)}{3}+1\right\}=\boldsymbol{\dfrac{20+8\sqrt{13}}{3}}$

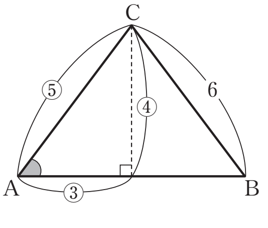
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　△ABC は，$\tan A=\dfrac{4}{3}$，BC＝6 を満たしているものとする．ただし，$A=\angle \mathrm{BAC}$ とする．

(1)　$\sin A$ および $\cos A$ の値をそれぞれ求めよ．

(2)　△ABC の外接円の半径を求めよ．

(3)　△ABC の面積の最大値と，そのときの辺 AB の長さを求めよ．

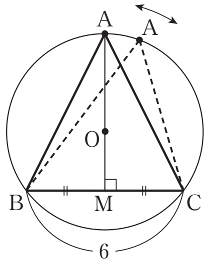


(1)　△ABC において，$\tan A>0$ より A は鋭角．

よって，右図より　$\boldsymbol{\sin A=\dfrac{4}{5}}$　　$\boldsymbol{\cos A=\dfrac{3}{5}}$

(2)　求める半径を R とすると

$$2R=\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}\ \text{より}\quad R=\frac{6}{2\cdot\frac{4}{5}}=\boldsymbol{\frac{15}{4}}$$



(3)　△ABC の外接円の中心を O，線分 BC の中点を M とすると BC が一定であることより，A が BC の垂直二等分線 OM 上にあるとき，△ABC は最大となる．
このとき △ABC は AB＝AC の二等辺三角形となり，O は線分 AM 上にある．
三平方の定理により

$$\mathrm{OM}^2=\mathrm{BO}^2-\mathrm{BM}^2=R^2-3^2=\frac{81}{16}\qquad \mathrm{OM}=\frac{9}{4}$$

$$\mathrm{AM}=\mathrm{AO}+\mathrm{OM}=R+\frac{9}{4}=6$$

よって求める面積の最大値は　$\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AM}=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot6=\mathbf{18}$

また，このとき三平方の定理により　$\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2}=\sqrt{36+9}=\boldsymbol{3\sqrt{5}}$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　三角比・平面図形

点 O を中心とする半径 a の円 C の周上に，相異なる３点 A，B，P がある．弦 AB の長さを $\sqrt{3}\,a$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$a>0$ とする．

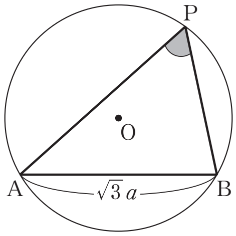
(1)　点 P が直線 AB に関して点 O と同じ側にあるとき，∠APB＝［アイ］°である．

(2)　点 P が円 C の周上を動くとき，△PAB の面積は PA＝$\sqrt{［ウ］}\,a$ のとき最大値 $\dfrac{［エ］\sqrt{［オ］}}{［カ］}a^{［キ］}$ をとる．

(1)　円の半径を R とすると，$R=a$

正弦定理より

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}=2R \qquad よって\quad \sin\angle\mathrm{APB}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



点 P が直線 AB に関して点 O と同じ側にあるので

$0^\circ<\angle\mathrm{APB}<90^\circ$

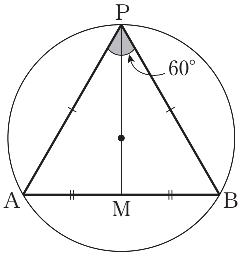
したがって　∠APB＝**60**°

(2)　線分 AB の中点を M とすると，△PAB の面積が最大となるのは，AB の垂直二等分線 OM 上の AB に関して O と同じ側に P があるときであり，このとき △PAB は PA＝PB の二等辺三角形となる．

∠APB＝60° より △PAB は正三角形．

よって　PA＝PB＝AB＝$\sqrt{\mathbf{3}}\,a$

このとき　$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\mathbf{3\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}a^{\mathbf{2}}$



（※　$\mathrm{PM}=\sqrt{\mathrm{PA}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{3a^2-\dfrac{3}{4}a^2}=\dfrac{3}{2}a$　より

　$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PM}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$ でも可．）

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。